৯ম-১০ম শ্রেণি

# সাধারণ গণিত

আলোচ্য বিষয়

## অধ্যায় ১৩ – সসীম ধারা

# ব্যবহারবিধি

দেখে নাও এই অধ্যায় থেকে কোথায় কোথায় প্রশ্ন এসেছে এবং সৃজনশীল ও বহুনির্বাচনীর গুরুত্ব।

**কুইক টিপস**

সহজে মনে রাখার এবং দ্রুত ক্যালকুলেশন করতে সহায়ক হবে।

**বহুনির্বাচনী (MCQ)**

বিগত বছর গুলোতে বোর্ড, স্কুল, কলেজ এবং বিশ্ববিদ্যালয়ে আসা বহুনির্বাচনী প্রশ্ন দেখে নাও উত্তরসহ।

**সৃজনশীল (CQ)**

পরীক্ষায় আসার মতো গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল দেখে নাও উত্তরসহ।

**প্র্যাকটিস**

পরীক্ষায় আসার মতো গুরুত্বপূর্ণ সমস্যাগুলো প্র্যাকটিস করে নিজেকে যাচাই করে নাও।

**উত্তরমালা**

প্র্যাকটিস সমস্যাগুলোর উত্তরগুলো মিলিয়ে নাও।

**উদাহরণ**

টপিক সংক্রান্ত উদাহরণসমূহ।

**সূত্রের আলোচনা**

সূত্রের ব্যাপারে বিস্তারিত জেনে নাও।

**টাইপ ভিত্তিক সমস্যাবলী**

সম্পূর্ণ অধ্যায়ের সুসজ্জিত আলোচনা।

## এক নজরে...

✓ অনুক্রম

✓ সমান্তর ধারা

✓ গুণোত্তর ধারা

✓ সসীম ধারা

✓ অসীম ধারা

✓ পদ নির্ণয়

❖ বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে ধারা দুই প্রকার:

(i) সমান্তর ধারা

(ii) গুণোত্তর ধারা

❖ রাশি বা পদের সংখ্যার ভিত্তিতে ধারা দুই প্রকার:

(i) সসীম ধারা

(ii) অসীম ধারা

**অনুক্রম:** যখন কতগুলো রাশি ক্রমান্বয়ে একটি বিশেষ নিয়মে এমনভাবে সাজানো হয় যে, প্রত্যেকটি রাশি এর পূর্ববর্তী ও পরবর্তী পদের সাথে কিভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়, তখন সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম বলে। অনুক্রমের পাশাপাশি দুইটি পদের মাঝে কমা (,) চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন: $0, 2, 4, 6, 8 \dots \dots$

**ধারা:** কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা পাওয়া যায়। যেমন: $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার, $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ একটি ধারা যার পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান।

**সমান্তর ধারা:** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পরবর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে। যেমন: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \dots$ একটি সমান্তর ধারা।

**সসীম ধারা:** যে সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট তাকে সসীম বা সান্তধারা বলে। যেমন: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 50$

**অসীম বা অনন্ত ধারা:** যে সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট নয় তাকে অসীম বা অনন্ত ধারা বলে। যেমন: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \infty$

## Σ সূত্রের আলোচনা

**সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়:** মনে করি,

প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$ $\therefore n$ তম পদ $= a + (n - 1)d$

❖ **সমান্তর ধারার $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি:**

মনে করি, প্রথম পদ $= a$

পদ সংখ্যা $= n$

সাধারণ অন্তর $= d$

শেষ পদ বা $n$ তম পদ $= p$

এবং সংখ্যক পদের সমষ্টি $= S_n$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a+p)$

যদি $n$ তম পদ, $p = a + (n-1)d$ হয়।

তবে, $S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}]$

$= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ সমান্তর ধারাটির পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

**সমান্তর ধারার $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি:** মনে করি, যেকোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a$, শেষ পদ $p$, সাধারণ অন্তর $d$, পদ সংখ্যা $n$ এবং ধারাটির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n$। ধারাটিকে প্রথম পদ হতে শেষ পদ এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে প্রথম পদ লিখে পাওয়া যায়:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (p-2d) + (p-d) + p \ldots\ldots (1)$$

এবং, $$S_n = p + (p-d) + (p-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a \ldots\ldots (2)$$

যোগ করে, $2S_n = (a+p) + (a+p) + (a+p) + \cdots + (a+p) + (a+p) + (a+p)$

$\Rightarrow 2S_n = n(a+p)$ [$\therefore$ ধারাটির পদ সংখ্যা $n$]

$\therefore S_n = \frac{n}{2}(a+p) \ldots\ldots (3)$

আবার, $n$ তম পদ, $p = a + (n-1)d$ [$p$ এর মান (3) এ বসিয়ে]

$S_n = \frac{n}{2}[a + \{a + (n-1)d\}]$

অর্থাৎ, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \ldots\ldots (4)$

কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a$, শেষ পদ $p$ এবং পদ সংখ্যা $n$ জানা থাকলে (3) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। কিন্তু প্রথম পদ $a$, সাধারণ অন্তর $d$, পদ সংখ্যা $n$ জানা থাকলে (4) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

**প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়:**

মনে করি, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= S_n$

ধারাটিকে প্রথম পদ হতে এবং বিপরীতক্রমে শেষ পদ হতে লিখে পাওয়া যায়:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \ldots\ldots (1)$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \ldots\ldots (2)$$

---

যোগ করে, $2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$

$\Rightarrow 2S_n = n(n+1)$ [$\therefore$ ধারাটির পদ সংখ্যা $n$]

$$\therefore S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়:**

মনে করি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= S_n$

অর্থাৎ $S_n = 1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

আমরা জানি, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = (r^2 + 2r + 1) - (r^2 - 2r + 1) = 4r$

বা, $(r+1)^2 . r^2 - r^2 . (r-1)^2 = 4r . r^2 = 4r^3 \ldots\ldots (1)$

(1) নং এ $r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ বসিয়ে পাই,

$2^2 . 1^2 - 1^2 . 0^2 = 4 . 1^3$

$3^2 . 2^2 - 2^2 . 1^2 = 4 . 2^3$

$4^2 . 3^2 - 3^2 . 2^2 = 4 . 3^3$

$\therefore (n+1)^2 . n^2 - n^2 . (n-1)^2 = 4 . n^3$

যোগ করে পাই, $(n+1)^2 . n^2 - 1^2 . 0^2 = 4(1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$

বা, $(n+1)^2 . n^2 = 4S_n$

$$\therefore S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

**গুণোত্তর ধারা:** কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে। যেমন: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

- গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অনুপাত $= r$ হলে,

$n$ তম পদ (সাধারণ পদ) $= ar^{n-1}$

$n$ টি পদের সমষ্টি, $S_n = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$ যখন $r > 1$ এবং $S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$ যখন $r < 1$

**সসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি:** $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $= r$

ধারাটির $n$ তম পদ $= ar^{n-1}$, যেখানে $n \in N$ এবং $r \neq 1$

$\therefore$ ধারাটির $n$ টি পদের সমষ্টি, $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$

$S_n = a\frac{r^n-1}{r-1}$ যখন $r > 1$ এবং $S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ যখন $r < 1$

**অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি:** $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \infty$

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a$, সাধারণ অনুপাত $r$, পদ সংখ্যা অসীম হবে যদি $-1 < r < 1$ হয়।

সেক্ষেত্রে, অসীম ধারার সমষ্টি $= \frac{a}{1-r}$

## প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

বা, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

বা, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

বা, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি, $S_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(iv) $1 + 3 + 5 + \cdots + n = n^2$

বা, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি, $S_n = n^2$

(v) $2 + 4 + 6 + \cdots + n = n(n+1)$

বা, $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি, $S_n = n(n+1)$

(vi) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

❖ **প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়:**

মনে করি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= S_n$

অর্থাৎ $S_n = 1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

আমরা জানি, $(r+1)^2 - (r-1)^2 = (r^2 + 2r + 1) - (r^2 - 2r + 1) = 4r$

বা, $(r+1)^2.r^2 - r^2.(r-1)^2 = 4r.r^2 = 4r^3 \ldots\ldots (1)$

(1) নং এ $r = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ বসিয়ে পাই,

$2^2.1^2 - 1^2.0^2 = 4.1^3$

$3^2.2^2 - 2^2.1^2 = 4.2^3$

$4^2.3^2 - 3^2.2^2 = 4.3^3$

… … … … … … … … … …

… … … … … … … … … …

$\therefore (n+1)^2.n^2 - n^2.(n-1)^2 = 4.n^3$

যোগ করে পাই, $(n+1)^2.n^2 - 1^2.0^2 = 4(1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3)$

বা, $(n+1)^2.n^2 = 4S_n$

$\therefore S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

## টাইপ ভিত্তিক সমস্যাবলী

## Type-1 সমান্তর ধারা

### Sub-Type: পদ সংক্রান্ত

**সমস্যা-১: একটি ধারা $\boldsymbol{a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + p}$ হলে ধারাটির $\boldsymbol{m}$ তম পদ $\boldsymbol{n^2}$ এবং $\boldsymbol{n}$ তম পদ $\boldsymbol{m^2}$ হলে $\boldsymbol{(m+n)}$ তম পদ কত?**

**সমাধান:** প্রদত্ত ধারা: $a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + p$

ধারাটির প্রথম পদ $= a$

সাধারণ অন্তর $= a + d - a = d$

$\therefore$ ধারাটির $m$ তম পদ $= a + (m-1)d$

ও $n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore (m+n)$ তম পদ $= a + (m+n-1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (m-1)d = n^2 \dots\dots (i)$

$a + (n-1)d = m^2 \dots\dots (ii)$

$(i) - (ii)$ করে পাই,

$a + (m-1)d - a - (n-1)d = n^2 - m^2$

বা, $(m - 1 - n + 1)d = (n+m)(n-m)$

বা, $(m-n)d = (n+m)(n-m)$

বা, $d = \frac{-(n+m)(m-n)}{(m-n)}$

বা, $d = -(m+n)$

$\therefore (m+n)$ তম পদ $= a + (m+n-1)d$

$= a + (m-1)d + nd$

$= n^2 + n\{-(m+n)\}$

$= n^2 - mn - n^2$

$= -mn$ **(Ans)**

**সমস্যা-২: একটি ধারা $10 + 13 + 16 + \cdots + 289$ হলে, ধারাটির কোন পদ $202$?**

**সমাধান**: প্রদত্ত ধারা: $10 + 13 + 16 + \cdots + 289$

এখানে, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 10$

সাধারণ অন্তর, $d = 13 - 10 = 3$

মনে করি, ধারাটির $n$ তম পদ $202$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (n-1)d = 202$

বা, $10 + (n-1)3 = 202$

বা, $10 + 3n - 3 = 202$

বা, $7 + 3n = 202$

বা, $3n = 202 - 7 = 195$

$\therefore n = 65$

$\therefore$ ধারাটির $65$ তম পদ $202$ **(Ans)**

**প্র্যাকটিস**

১) $11 + 9 + 7 + 5 + \cdots$ ধারাটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $-133$, ধারাটির কোন পদ $-39$?

২) একটি ধারা $log\, 3 + log\, 9 + log\, 27 + \cdots$ হলে ধারাটির কত তম পদ $log\, 6561$?

৩) $1760$ মিটার লম্বা একটি ফিতাকে $20$ টি টুকরা করা হলো যেখানে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য $12$ মিটার। $d$ ও বড় টুকরার মান নির্ণয় কর।

8) একটি সমান্তর ধারার $p$ তম পদ $2q$ এবং $q$ তম পদ $2p$। ধারাটির $p+q$ তম পদ নির্ণয় কর।

৫) $12 + 24 + 48 + \cdots$ ধারাটির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $1524$। প্রদত্ত ধারাটি হতে $n$ এর মান নির্ণয় কর।

৬) একটি সমান্তর ধারার $12$ তম পদ $77$ এবং $18$ তম পদ $113$। ধারাটির ১ম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর। ধারাটির $25$ তম পদের মান কত?

৭) একটি ধারার প্রথম পদ 9 এবং সাধারণ অন্তর $-2$। ধারাটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $-96$ হলে, $n$ এর মান নির্ণয় কর।

৮) একটি সমান্তর ধারার 7ম পদ 5 এবং 15 তম পদ $-27$। প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $d$ বিবেচনা করে, ধারাটির প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $-783$ হলে, $n$ এর মান নির্ণয় কর।

## Sub-Type: পদের সমষ্টি নির্ণয়

**সমস্যা-১: $9 + 7 + 5 + \cdots$ ধারাটির 27 টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।**

**সমাধান**: প্রদত্ত ধারা: $9 + 7 + 5 \ldots \ldots \ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 9$

সাধারণ অন্তর, $d = 7 - 9 = -2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ সংখ্যক পদের যোগফল $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$$= \frac{n}{2}\{2 \times 9 + (27-1) \times (-2)\}$$

$$= \frac{27}{2}\{18 - 26 \times 2\}$$

$$= \frac{27}{2}\{18 - 52\}$$

$$= \frac{27}{2}(-34)$$

$$= 27 \times (-17)$$

$$= -459$$ **(Ans)**

**সমস্যা-২: একটি সমান্তর ধারার ৬ষ্ঠ পদ 30 এবং ১১দশ তম পদ 55। ধারাটির প্রথম 50 টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।**

**সমাধান**: মনে করি, সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অন্তর $= d$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ ধারার ৬ষ্ঠ পদ $= a + (6-1)d = a + 5d$

ধারার ১১দশ তম পদ $= a + (11-1)d = a + 10d$

প্রশ্নমতে, $a + 5d = 30 \ldots \ldots (i)$

$a + 10d = 55 \ldots \ldots (ii)$

$(ii) - (i)$ করে পাই,

$a + 10d - a - 5d = 55 - 30$

বা, $5d = 25$

বা, $d = 5$

$d$ এর মান $(i)$ এ বসিয়ে পাই,

$a + (5 \times 5) = 30$

বা, $a + 25 = 30$

বা, $a = 5$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 5$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ সংখ্যক পদের যোগফল $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ 50 টি পদের যোগফল $= \frac{50}{2}\{2.5 + (50-1)5\}$

$= 25\{10 + 49.5\}$

$= 6375$ **(Ans)**

## প্র্যাকটিস

১) $-87 - 82 - 77 - 72 \ldots\ldots$ একটি সমান্তর ধারা। ধারাটির প্রথম 29 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

২) একটি সমান্তর ধারার প্রথম $m$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $m(m+1)$। ধারাটির প্রথম 37 টি পদের যোগফল নির্ণয় কর। প্রথম 29 টি পদের যোগফল নির্ণয় করে তাদের মধ্যকার পার্থক্য নির্ণয় কর।

৩) $x + y + z + \cdots$ সমান্তর ধারাটির সাধারণ অন্তর $d$। $d$ সম্বলিত একটি সমীকরণ $\frac{\sqrt{1+d}+\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}-\sqrt{1-d}} = 2 + \sqrt{3}$। ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 100টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৪) একটি সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 এবং 19 তম পদ 91। ধারাটির শেষ পদ 149 হলে, তার সমষ্টি নির্ণয় কর।

৫) আলমগীর সাহেব প্রতিদিন 1 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী দিনগুলোতে পূর্ববর্তী দিনের তুলনায় 1 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন। তিনি এক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করবেন?

## টাইপ ভিত্তিক সমস্যাবলী

### Type-2 গুণোত্তর ধারা

**সমস্যা-১: দুপুর 1 টা 15 মিনিটে 1 জন এস.এস.সি পরীক্ষার রেজাল্ট জানতে পারল। 1 টা 20 মিনিটে জানলো 8 জন, 1 টা 25 মিনিটে জানলো 27 জন। এভাবে রেজাল্ট ছড়িয়ে পড়ল। 2 টা 10 মিনিট পর্যন্ত মোট কতজন রেজাল্ট জানতে পারবে?**

**সমাধান:** প্রথমক্ষেত্রে ধারাটি হবে- 1 টা 15 মি., 1 টা 20 মি., 1 টা 25 মি.

সাধারণ অন্তর $= 1$ টা $20$ মি. $-1$ টা $15$ মি. $= 5$ মি.

$1$ টা $15$ মি. থেকে $2$ টা $10$ মি.পর্যন্ত প্যাটার্নের পদসংখ্যা $= \frac{2 \text{ টা } 10 \text{ মি.} - 1 \text{ টা } 15 \text{ মি.}}{5 \text{ মিনিট}} + 1$

$= \frac{55 \text{ মিনিট}}{5 \text{ মিনিট}} + 1 = 12$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্যাটার্ন হবে: $1, 8, 27 \dots \dots$

এখন রেজাল্ট জানতে পারা শিক্ষার্থীদের ধারা,

$1 + 8 + 27 + \cdots = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots$

ধারাটির ১ম পদ $a = 1 = 1^3$

ধারাটির ২য় পদ $= 8 = 2^3$

$\therefore$ ধারাটির $12$ তম পদ $= 12^3 = 1728$ জন।

$\therefore$ $2$ টা $10$ মিনিটে রেজাল্ট জানতে পারে $1728$ জন।

**সমস্যা-২: আগের প্রশ্নের উদ্দীপক হতে, কয়টার সময় 6175225 জন জানতে পারবে রেজাল্ট?**

**সমাধান**: মনে করি, $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 6175225$

আমরা জানি, $n$ সংখ্যক পদের ঘনের সমষ্টি $S_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নমতে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 6175225$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 2485$

বা, $n(n+1) = 4970$

বা, $n^2 + n - 4970 = 0$

বা, $n^2 + 71n - 70n - 4970 = 0$

বা, $n(n+71) - 70(n+71) = 0$

বা, $(n+71)(n-70) = 0$

হয় $n + 71 = 0$ অথবা, $n - 70 = 0$

বা, $n = -71$ বা, $n = 70$

$\because n \neq -71$ তাহলে $n = 70$

$\therefore$ ১ম প্যাটার্নের জন্য $70$ তম পদ $= 1$ টা $15$ মিনিট $+(70-1) \times 5$ মিনিট

$= 1$ টা $15$ মিনিট $+345$ মিনিট

$= 1$ টা $15$ মিনিট $+5$ ঘণ্টা $45$ মিনিট

$= 7$ টা **(Ans)**

## প্র্যাকটিস

১) $5 + p + q + s + 3125$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত $p, q, s$ এর মান নির্ণয় কর।

২) একটি গুণোত্তর ধারার ৪র্থ পদ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ৯ম পদ $-\frac{1}{8}$। ধারাটি নির্ণয় করে এর 15 তম থেকে 25 তম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

৩) একটি গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ $8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$। ধারাটির কত তম পদ $-\frac{1}{8}$ তা নির্ণয় কর। যদি ধারাটির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $-\frac{16\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}+1)}$ হয়, তবে $n$ এর মান নির্ণয় কর।

## সৃজনশীল (CQ)

**প্রশ্ন-১:**

স্মৃতি দাশ 2015 সালে জানুয়ারি মাসে 16000 টাকা বেতনে চাকুরিতে যোগদান করলেন। তার বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ প্রতি বছর 5%। প্রতি বছর তার বেতন থেকে 25% ভবিষ্যৎ তহবিল হিসেবে কর্তন করা হয়। তিনি বেতন থেকে বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে বছর শেষে একটি ব্যাংকে 15000 টাকা জমা রাখেন। তিনি 2045 সালের 31 ডিসেম্বর চাকুরি থেকে অবসরে যাবেন।

**ক) স্মৃতি দাশের মূল বেতন কোন ধারাকে সমর্থন করে? ধারাটি লিখ।**

**খ) ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত তিনি বেতন হিসাবে চাকুরি জীবনে মোট কত টাকা পাবেন।**

**গ) 2045 সালের 31 ডিসেম্বর ঐ ব্যাংকে মুনাফার সাথে তার মোট কত টাকা জমা হবে?**

**সমাধান:**

**ক)** স্মৃতি দাশের মাসিক বেতন $= 16{,}000$ টাকা

$\therefore$ স্মৃতি দাশের বার্ষিক বেতন $= (16{,}000 \times 12) = 1{,}92{,}000$ টাকা

স্মৃতি দাশের বার্ষিক বেতন প্রতি বছর 5% বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ প্রথম বছর শেষে বা ২য় বছরে তার বার্ষিক বেতন $= 1{,}92{,}000 \times 1.05$

$\therefore$ ৩য় বছরে তার বার্ষিক বেতন $= 1{,}92{,}000 \times (1.05)^2$

৪র্থ বছরে তার বার্ষিক বেতন $= 1{,}92{,}000 \times (1.05)^3$

$\therefore$ স্মৃতি দাশের প্রতি বছর বেতনের ধারাটি,

$1{,}92{,}000 + 1{,}92{,}000 \times 1.05 + 1{,}92{,}000 \times (1.05)^2 + \cdots$ **(Ans)**

প্রতি বছর বেতন বৃদ্ধির অনুপাত, $r = \frac{1,92,000 \times 1.05}{1,92,000} = 1.05$

∴ স্মৃতি দাশের বেতনের ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা। **(Ans)**

**খ)** 2015 সালের জানুয়ারি থেকে 2045 সালের ডিসেম্বর পর্যন্ত মোট $(2045 - 2015 + 1)$ বা, 31 বছর

31 বছরে ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত তার বেতন বাবদ প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$= (1,92,000 - 1,92,000 \times 0.25) + (1,92,000 \times 1.05 - 1,92,000 \times 1.05 \times 0.25) +$

$\{1,92,000 \times (1.05)^2 - 1,92,000 \times (1.05)^2 \times 0.25\} + \cdots$

$= 1,92,000(1 - 0.25) + 1,92,000 \times 1.05(1 - 0.25) + 1,92,000 \times (1.05)^2(1 - 0.25) + \cdots$

$= (1 - 0.25)\{1,92,000 + 1,92,000 \times 1.05 + 1,92,000 \times (1.05)^2 + \cdots\}$

$= 0.75 \times 1,92,000\{1 + 1.05 + (1.05)^2 + \cdots\}$

$= 1,44,000(1 + 1.05 + 1.05^2 + \cdots)$

বন্ধনীর মধ্যে প্রাপ্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1.05}{1} = 1.05$

এবং পদসংখ্যা $n = 31$

∴ 31 বছরে তার প্রাপ্য মোট বেতনের পরিমাণ $= 1,44,000 \times a\frac{r^n - 1}{r - 1}$ $[\because r > 1]$

$= 1,44,000 \times 1 \times \frac{(1.05)^{31} - 1}{1.05 - 1}$

$= 1,44,000 \times 70.761$

$= 1,01,89,584$

∴ ভবিষ্যৎ তহবিল ব্যতিত বেতন হিসাবে চাকুরি জীবনে তিনি মোট 1,01,89,584 টাকা পাবেন। **(Ans)**

**গ)** স্মৃতি দাশ বছর শেষে 15,000 হাজার টাকা 4% চক্রবৃদ্ধি সুদে জমা রাখেন।

∴ প্রথম বছর শেষে জমা করা 15,000 টাকা 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে $(31 - 1)$ বা, 30 বছরে সুদে আসলে হবে $= 15,000 \times (1.04)^{30}$

অনুরূপভাবে, ২য় বছর শেষে জমা করা 15,000 টাকা 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে $(31 - 2)$ বা, 29 বছরে সুদে আসলে হবে $= 15,000 \times (1.04)^{29}$

অনুরূপভাবে, ৩য় বছর শেষে জমা করা 15,000 টাকা 4% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে $(31 - 3)$ বা, 28 বছরে সুদে আসলে হবে $= 15,000 \times (1.04)^{28}$

এভাবে, 2045 সালের ডিসেম্বরে জমা করা 15,000 টাকা সুদে আসলে হবে $= 15,000 \times (1.04)^0$

$\therefore$ 2045 সালের 31 ডিসেম্বর ঐ ব্যাংকে মুনাফা আসলে তার জমাকৃত টাকার পরিমাণ

$15,000 \times (1.04)^{30} + 15,000 \times (1.04)^{29} + \cdots + 15,000 \times (1.04)^{0}$

$= 15,000 \times (1 + 1.04 + 1.04^2 + \cdots + 1.04^{30})$

$= 15,000 \times 1 \times \frac{(1.04)^{31} - 1}{1.04 - 1}$

$= 15,000 \times 59.33$

$= 889950$

$\therefore$ 2045 সালের 31 ডিসেম্বর ঐ ব্যাংকে মুনাফার সহিত স্মৃতি দাশের 889950 টাকা জমবে। **(Ans)**

**প্রশ্ন-২:**

কোনো সমান্তর ধারার দুইটি নির্দিষ্ট পদ, $l$ তম পদ $l^2$ এবং $k$ তম পদ $k^2$।

**ক) ধারাটির প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $d$ হলে উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।**

**খ) ধারাটির $(l + k)$ তম পদ নির্ণয় কর।**

**গ) প্রমাণ কর যে, ধারাটির প্রথম $(l + k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{l+k}{2}(l^2 + k^2 + l + k)$**

**সমাধান:**

**ক)** আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ $a$ এবং সাধারণ অন্তর $d$ হলে,

$l$ তম পদ $= a + (l - 1)d$

এবং $k$ তম পদ $= a + (k - 1)d$

প্রশ্নমতে, $a + (l - 1)d = l^2 \ldots\ldots (i)$

$a + (k - 1)d = k^2 \ldots\ldots (ii)$ **(Ans)**

**খ)** $(i)$ নং থেকে $(ii)$ বিয়োগ করে

$a + (l - 1)d - a - (k - 1)d = l^2 - k^2$

$\Rightarrow d(l - 1 - k + 1) = l^2 - k^2$

$\Rightarrow d(l - k) = (l + k)(l - k)$

$\therefore d = l + k$

$\therefore$ ধারাটির $(l + k)$ তম পদ $= a + (l + k - 1)d$

$= a + (l - 1)d + kd$

$$= l^2 + k(l + k)$$
$$= l^2 + lk + k^2 \quad \textbf{(Ans)}$$

**গ)** $(i)$ নং এ $d$ এর মান বসিয়ে পাই,

$a + (l - 1)(l + k) = l^2$

বা, $a + l^2 + lk - l - k = l^2$

$\therefore a = l + k - lk$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি

$S = \frac{n}{2}(a + p)$ যেখানে $p$ শেষ পদ।

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির প্রথম $(l + k)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি

$= \frac{l+k}{2}\{a + (l + k)$ তম পদ$\}$

$= \frac{l+k}{2}\{a + l^2 + lk + k^2\}$ ['খ' থেকে পাই]

$= \frac{l+k}{2}\{l + k - lk + l^2 + lk + k^2\}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{l+k}{2}(l^2 + k^2 + l + k)$ **(প্রমাণিত)**

**প্রশ্ন-৩:**

একটি গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ $8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

**ক) ধারাটির প্রথম পদ নির্ণয় কর।**

**খ) ধারাটির কত তম পদ $-\frac{1}{8}$ তা নির্ণয় কর।**

**গ) যদি ধারাটির $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $-\frac{16\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}+1)}$ হয়, তবে $n$ এর মান নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**ক)** দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ $8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

∴ গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $= 8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1}$

$$= 8\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -8$$

∴ গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $= -8$

**খ)** গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ $8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$

'ক' হতে প্রাপ্ত, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $-8$

এখন, গুণোত্তর ধারার ২য় পদ $8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}$

$$= 8\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{8}{\sqrt{2}} \div (-8)$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

মনেকরি, গুণোত্তর ধারাটির $n$ তম পদ $= -\frac{1}{8}$

বা, $ar^{n-1} = -\frac{1}{8}$

বা, $-8 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = -\frac{1}{8}$

বা, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \frac{1}{64}$

বা, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}$

বা, $n - 1 = 12$

∴ $n = 13$

∴ গুণোত্তর ধারাটির 13 তম পদ $= -\frac{1}{8}$ **(Ans)**

**গ)** 'খ' হতে প্রাপ্ত, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $= -8$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\therefore$ ধারার $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ যখন $r < 1$

$$= \frac{-8\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{-8\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -8\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}}{\sqrt{2}+1}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{-8\sqrt{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}}{\sqrt{2}+1} = -\frac{16\sqrt{2}+1}{2(\sqrt{2}+1)}$

বা, $1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{16\sqrt{2}+1}{8\sqrt{2}\times 2}$

বা, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 1 - \frac{16\sqrt{2}+1}{16\sqrt{2}}$

বা, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{16\sqrt{2}-16\sqrt{2}-1}{16\sqrt{2}}$

বা, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{-1}{16\sqrt{2}}$

বা, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9$

$\therefore n = 9$ **(Ans)**

**প্রশ্ন-8:**

রনি তার বন্ধু রবিকে আগের দিন যত টাকা দেবে পরের দিন তার দ্বিগুণ টাকা দেবে।

**ক) রনির প্রদেয় টাকার পরিমাণ কোন ধারাকে সমর্থন করে।**

**খ) রনি প্রথম দিন 1 টাকা দিলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং 14 তম দিনে রনি রবিকে কত টাকা দিয়েছিল?**

**গ) বিনিময়ে রবি রনিকে প্রতিদিন 1000 টাকা দিলে 14 দিন শেষে কে বেশি লাভবান হবে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর।**

**সমাধান:**

**ক)** রনির প্রদেয় টাকার পরিমাণ গুণোত্তর ধারাকে সমর্থন করে।

**খ)** ১ম দিন দিল $= 1$ টাকা

$= a$

২য় দিন দিল $= 2$ টাকা

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{1} = 2$

$\therefore$ ৩য় দিন দিল $= ar^{3-1} = 1 \times 2^2 = 4$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$\therefore$ ধারাটি $= 1 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + \cdots$

$= 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$

$\therefore$ 14 তম দিনে রবিকে দিয়েছিল $= (1 \times 2^{14-1}) = 8192$ টাকা **(Ans)**

**গ)** গুণোত্তর ধারাটিতে প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{1} = 2 > 1$

$\therefore$ 14 দিনে রনির মোট প্রদেয় টাকা $= a\frac{r^n-1}{r-1}$ টাকা যেখানে $n = 14$

$= \frac{1\times(2^{14}-1)}{2-1}$ টাকা

$= 2^{14} - 1$ টাকা

$= 16384 - 1 = 16383$ টাকা

এবং রবির মোট প্রদেয় টাকা $= (14 \times 1000) = 14000$ টাকা

এখানে, রনির প্রদেয় টাকার পরিমাণ বেশি।

$\therefore$ রবির লাভ $= (16383 - 14000)$ টাকা

$\therefore$ রবির লাভ $= (16383 - 14000)$ টাকা

∴ রবি লাভবান হবে।

**প্রশ্ন-৫:**

একটি সমান্তর ধারার $p$ তম, $q$ তম এবং $r$ তম পদ যথাক্রমে $x, y$ এবং $z$। আবার একটি গুণোত্তর ধারার তৃতীয় পদ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$।

**ক) $ax - cy = 0, cx - ay = c^2 - a^2$ সমীকরণ জোট সঙ্গতিপূর্ণ কি না নির্ণয় কর।**

**খ) সমান্তর ধারার ক্ষেত্রে দেখাও যে, $x(q-r) + y(r-p) + z(p-q) = 0$**

**গ) গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদ নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**ক)** দেওয়া আছে, $ax - cy = 0$

$$cx - ay = c^2 - a^2$$

এখানে, $x$ ও $y$ এর সহগদ্বয়ের অনুপাত যথাক্রমে $\frac{a}{c}$ এবং $\frac{-c}{-a} = \frac{c}{a}$, যারা পরস্পর অসমান।

∴ সমীকরণদ্বয় সঙ্গতিপূর্ণ।

**খ)** মনে করি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ $= m$ ও সাধারণ অন্তর $= d$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম $n$ তম পদ $= m + (n-1)d$

∴ সমান্তর ধারার প্রথম $p$ তম পদ $= m + (p-1)d = x \dots\dots (i)$

ও $q$ তম পদ $= m + (q-1)d = y \dots\dots (ii)$

এবং $r$ তম পদ $= m + (r-1)d = z \dots\dots (iii)$

$L.H.S = x(q-r) + y(r-p) + z(p-q)$

$= \{m + (p-1)d\}(q-r) + \{m + (q-1)d\}(r-p) + \{m + (r-1)d\}(p-q)$

[$x, y, z$ এর মান বসিয়ে]

$= m(q-r) + d(p-1)(q-r) + m(r-p) + d(q-1)(r-p) + m(p-q) + d(r-1)(p-q)$

$= m(p - r + r - p + p - q) + d(pq - pr - q + r + qr - pq - r + p + pr - qr - p + q)$

$= m.0 + d.0$

$= 0 = R.H.S$

**গ)** মনে করি, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $= a$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ ধারাটির ৫ম পদ $= ar^{5-1} = ar^4$

এবং ধারাটির ৩য় পদ $= ar^{3-1} = ar^2$

উদ্দীপক অনুসারে, $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \dots\dots (i)$

এবং $ar^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots (ii)$

$(i) \div (ii)$ হতে পাই, $\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \div \frac{1}{\sqrt{3}}$

$(i) \div (ii)$ হতে পাই, $\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \div \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $r^2 = \frac{2}{3}$

$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$r$ এর মান $(ii)$ নং এ বসিয়ে পাই,

বা, $a\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $a.\frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $a = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ ১ম পদ $= a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

২য় পদ $= ar^{2-1} = ar = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

৩য় পদ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ [দেওয়া আছে]

৪র্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

এবং ৫ম পদ $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$ [দেওয়া আছে]

$\therefore$ ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদ হলো: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}$ **(Ans)**

**প্রশ্ন-৬:**

একটি সমান্তর ধারার প্রথম 10 পদের সমষ্টি 155 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 610, অপর একটি গুণোত্তর ধারার চতুর্থ পদ 2 এবং নবম পদ $8\sqrt{2}$

**ক) প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

**খ) সমান্তর ধারাটির 35 তম পদ নির্ণয় কর।**

**গ) গুণোত্তর ধারাটির নবম পদ হতে বিশতম পদ পর্যন্ত 12 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**ক)** আমরা জানি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{50(50+1)(2\times50+1)}{6} = \frac{50\times51\times101}{6}$

$= 42925$ **(Ans)**

**খ)** মনে করি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$ ও পদ সংখ্যা $= n$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ পদের সমষ্টি, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

দেওয়া আছে, ১ম 10 পদের সমষ্টি $= 155$

বা, $\frac{10}{2}\{2a + (10-1)d\} = 155$

বা, $5\{2a + 9d\} = 155$

$\therefore 2a + 9d = 31 \ldots\ldots (i)$

এবং ১ম 20 পদের সমষ্টি $= 610$

বা, $\frac{20}{2}\{2a+(20-1)d\}=610$

বা, $10\{2a+19d\}=610$

$\therefore 2a+9d=61 \ldots\ldots (ii)$

$(ii)-(i)$ হতে পাই,

$10d=30$

বা, $d=\frac{30}{10}=3$

$(i)$ নং এ $d=3$ বসিয়ে পাই,

$2a+9.3=31$

বা, $2a+27=31$

বা, $2a=4$

$\therefore a=2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $=a+(n-1)d$

$\therefore$ 35 তম পদ $= a+(35-1)d=2+34\times 3=104$ **(Ans)**

**গ)** মনে করি, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$

$\therefore$ ধারার ৪র্থ পদ $=ar^{4-1}=ar^3$

$\therefore ar^3=2$

এবং ৯ম পদ $=ar^{9-1}=ar^8$

$\therefore ar^8=8\sqrt{2}$

$\therefore \frac{ar^8}{ar^3}=\frac{8\sqrt{2}}{2}$

বা, $r^5=4\sqrt{2}$

বা, $r^5=(\sqrt{2})^5$

$\therefore r=\sqrt{2}$

এখন, $a(\sqrt{2})^3=2$ [$r$ এর মান বসিয়ে]

বা, $a=\frac{2}{(\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}$

$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ নির্ণেয় ধারাটি: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.(\sqrt{2})^2 + \cdots$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} + \cdots$$

ধারাটি ১ম আট পদের সমষ্টি, $S_8 = a\frac{r^8-1}{r-1}$ যখন $r > 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{(\sqrt{2})^8-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{16-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{15}{2-\sqrt{2}}$$

আবার, ধারাটি ১ম বিশ পদের সমষ্টি, $S_{20} = a\frac{r^{20}-1}{r-1}$ যখন $r > 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{(\sqrt{2})^{20}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{16-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{15}{2-\sqrt{2}}$$

আবার, ধারাটি ১ম বিশ পদের সমষ্টি, $S_{20} = a\frac{r^{20}-1}{r-1}$ যখন $r > 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{(\sqrt{2})^{20}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1024-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1023}{2-\sqrt{2}}$$

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ হতে বিশতম পদ পর্যন্ত 12 টি পদের সমষ্টি $= S_{20} - S_8$

$$= \frac{1023}{2-\sqrt{2}} - \frac{15}{2-\sqrt{2}} = \frac{1023-15}{2-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1008}{2-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1008(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{1008(2+\sqrt{2})}{4-2}$$

$$= \frac{1008(2+\sqrt{2})}{2}$$

$= 504(2+\sqrt{2})$ **(Ans)**

**প্রশ্ন-৭:**

একটি গুণোত্তর ধারার ৪র্থ পদ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ৯ম পদ $\frac{1}{8}$ এবং একটি সমান্তর ধারার $p$ তম পদ $x, q$ তম পদ $y$

**ক) প্রথম 12 টি জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

**খ) সমান্তর ধারাটির $p+q-1$ তম পদ নির্ণয় কর।**

**গ) গুণোত্তর ধারাটি নির্ণয় করে এর 15 তম থেকে 25 তম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**ক)** আমরা জানি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি,

$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

∴ প্রথম 12 টি জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি

$$= 2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 24^2$$
$$= 1.2^2 + 2^2.2^2 + 3^2.2^2 + \cdots + 12^2.2^2$$
$$= 2^2(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 12^2)$$
$$= 2^2 \times \frac{12\times(12+1)\times(2\times12+1)}{6}$$
$$= 4 \times \frac{12\times13\times25}{6}$$
$$= 2600$$ **(Ans)**

**খ)** মনে করি, সমান্তর ধারার প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $p$ তম পদ $= a + (p-1)d$

∴ $q$ তম পদ $= a + (q-1)d$

সুতরাং $a + (p-1)d = x \dots\dots (1)$

$a + (q-1)d = y \dots\dots (2)$

বিয়োগ করে, $(p - 1 - q + 1)d = x - y$

$\Rightarrow (p-q)d = x - y$

$\therefore d = \frac{x-y}{p-q}$

$(i)$ নং সমীকরণের $d$ এর মান বসিয়ে পাই, $a+\frac{(p-1)(x-y)}{p-q}=x$

এখন, ধারাটির $(p+q-1)$ তম পদ

এখন, ধারাটির $(p+q-1)$ তম পদ

$=x-\frac{(p-1)(x-y)}{p-q}+(p+q-2)\frac{x-y}{p-q}$

$=\frac{px-qx-px+py+x-y+px-py+qx-qy-2x+2y}{p-q}$

$=\frac{y-x+px-qy}{p-q}$

$=\frac{px-qy+y-x}{p-q}$ **(Ans)**

**গ)** মনে করি, গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $=a$ এবং সাধারণ অনুপাত $=r$

ধারার $n$ তম পদ $=ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারার ৪র্থ পদ $=ar^{4-1}=ar^3$

এবং ৯ম পদ $=ar^{9-1}=ar^8$

$\therefore ar^3=\frac{1}{\sqrt{2}} \ldots\ldots(i)$

$ar^8=\frac{1}{8}\ldots\ldots(ii)$

$(i)\div(ii)$ হতে পাই, $\frac{ar^8}{ar^3}=\frac{1}{8}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $r^5=\frac{1}{8}\times\sqrt{2}$

বা, $r^5=\frac{1}{(\sqrt{2})^6}\times\sqrt{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$

$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$r$ এর মান $(i)$ নং এ বসিয়ে পাই,

$\Rightarrow ar^3=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}$

$\therefore a = 2$

$\therefore$ ধারার ২য় পদ $= ar = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ধারার ৩য় পদ $= ar^2 = 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

$\therefore$ ধারাটি $= 2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots$

এখানে, 15 তম পদ থেকে 25 তম পদ পর্যন্ত মোট পদ সংখ্যা $= (25 - 15 + 1) = 11$ টি

$\therefore$ 15 তম পদ তথা প্রথম পদ $= ar^{15-1} = ar^{14}$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{14} = 2 \times \frac{1}{2^7}$$

$$= \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$\therefore$ 15 তম পদ থেকে 25 তম পদ পর্যন্ত 11 টি পদের সমষ্টি,

$$S_{11} = a\frac{1-r^{11}}{1-r} = \frac{1}{64} \times \frac{\left\{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{11}\right\}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{64} \times \frac{\left\{1-\frac{1}{32\sqrt{2}}\right\}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{64} \times \frac{32\sqrt{2}-1}{32\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{32\sqrt{2}-1}{2048(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{(32\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2048(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{32\times2+32\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2048(2-1)}$$

$$= \frac{64+31\sqrt{2}-1}{2048}$$

$$= \frac{63+31\sqrt{2}}{2048}$$ **(Ans)**

**প্রশ্ন-৮:**

একজন দৌড়বিদ প্রথম দিন 1000 মিটার দৌড়াল এবং দিন থেকে সে আগের চেয়ে 100 মিটার বেশি দূরত্ব অতিক্রম করার সিদ্ধান্ত নিলেন।

**ক) সমাধান কর: $(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{3}x-2)=0$**

**খ) কততম দিনে সে $10,000$ মিটার দৌড়াবে?**

**গ) পরের দিন থেকে 100 মিটার বেশি না দৌড়ে সে যদি আগের দিনের অতিক্রান্ত দূরত্বের 10% বেশি করে দৌড়ানোর সিদ্ধান্ত নেয়। তবে 10 দিনে সে মোট কত কি.মি. দৌড়াবে?**

**সমাধান:**

**ক)** $(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{3}x-2)=0$

হয় $\sqrt{2}x+3=0$ অথবা, $\sqrt{3}x-2=0$

বা, $\sqrt{2}x=-3$ বা, $\sqrt{3}x=2$

$\therefore x=-\frac{3}{\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\therefore x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(Ans)**

**খ)** অতিক্রান্ত দূরত্বকে নিম্নে একটি ধারার সাহায্যে প্রকাশ করা হলো:

$1000+(1000+100)+(1000+100+100)+\cdots$

$=1000+1100+1200+\cdots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a=1000$

সাধারণ অন্তর, $d=1100-1000=100$

$\therefore$ ইহা একটি সমান্তর ধারা।

মনে করি, $n$ তম দিনে সে 10000 মিটার দৌড়াবে।

আমরা জানি, $n$ তম পদ $=a+(n-1)d$

$\therefore a+(n-1)d=10000$

বা, $1000+(n-1)100=10000$

বা, $(n-1)100=9000$

বা, $n-1=90$

$\therefore n=91$

∴ 91 তম দিনে সে 10,000 মিটার দৌড়াবে। **(Ans)**

**গ)** প্রথম দিনে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 1000$ মিটার

দ্বিতীয় দিনে 10% বেশি অতিক্রম করলে দ্বিতীয় দিনে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= (1000 + 1000$ এর $10\%)$ মিটার

$= \left(1000 + 1000 \times \frac{10}{100}\right)$ মিটার

$= (1000 + 100) = 1100$ মিটার

আবার, তৃতীয় দিনে আগের দিনের চেয়ে 10% বেশি অতিক্রম করলে তৃতীয় দিনে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= (1100 + 1100$ এর $10\%)$ মিটার

$= \left(1100 + 1100 \times \frac{10}{100}\right)$ মিটার

$= (1100 + 110) = 1210$ মিটার

অ্যাথলেটের অতিক্রান্ত দূরত্বের ধারাটি হবে: $1000 + 1100 + 1210 + \cdots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1000$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1100}{1000} = \frac{11}{10} > 1$

∴ ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে, 10 দিনে অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ $n = 10$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার $n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n = a\frac{r^n-1}{r-1}$ যখন $r > 1$

∴ ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি, $S_{10} = 1000 \times \frac{\left(\frac{11}{10}\right)^n - 1}{\frac{11}{10} - 1}$

$= 15937.425$

∴ 10 দিনে সে মোট 15937.425 মিটার বা 15.94 কি.মি. (প্রায়) দৌড়াবে। **(Ans)**

**প্রশ্ন-৯:**

$2x + 5y = -14$ , $4x - 5y = 17$

কোনো ধারার $p$ তম পদ $3p - 1$, যেখানে $p \in N$

**ক) $128 + 64 + 32 + \cdots$ ধারার কোন পদ $\frac{1}{2}$?**

**খ) প্রদত্ত সমীকরণ জোটটির সমাধান আড়গুণন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।**

**গ) ধারাটি নির্ণয় কর। ধারাটির ১ম পদকে ১ম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর। অতঃপর নতুন ধারাটির প্রথম ৪টি পদের সমষ্টি সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**ক)** প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = 128$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ইহা একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির $n$ তম পদ $= \frac{1}{2}$

আমরা জানি, $n$ তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2\times128} = \frac{1}{256}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$

$\Rightarrow n - 1 = 8$

$\therefore n = 9$

$\therefore$ ধারাটির 9 তম পদ $= \frac{1}{2}$ **(Ans)**

**খ)** প্রদত্ত সমীকরণ জোট: $2x + 5y = -14$

$4x - 5y = 17$

অর্থাৎ $2x + 5y + 14 = 0$

$4x - 5y - 17 = 0$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$\frac{x}{5(-17)-14(-5)} = \frac{y}{14.4-2(-17)} = \frac{1}{2(-5)-4.5}$

বা, $\frac{x}{-85+70} = \frac{y}{56+34} = \frac{1}{-10-20}$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{y}{90} = \frac{1}{-30}$

বা, $\frac{x}{-15} = \frac{1}{-30}$ এবং $\frac{y}{90} = \frac{1}{-30}$

বা, $x = \frac{1}{2}$ বা, $y = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$ **(Ans)**

**গ)** সমান্তর ধারার $p$ তম পদ বা সাধারণ পদ, $3p-1$ যেখানে $p \in N$
$\therefore$ ১ম পদ $= 3 \times 1 - 1 = 2$
২য় পদ $= 3 \times 2 - 1 = 5$
৩য় পদ $= 3 \times 3 - 1 = 8$
৪র্থ পদ $= 3 \times 4 - 1 = 11$

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 2$

সাধারণ অন্তর, $d = 8 - 5 = 5 - 2 = 3$

$\therefore$ নতুন ধারার প্রথম পদ, $a = 2$

সাধারণ অনুপাত, $r = 3$

$\therefore$ নতুন গুণোত্তর ধারা: $a + ar + ar^2 + \cdots$

$= 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots$

$= 2 + 6 + 18 + \cdots$

এখানে সাধারণ অনুপাত, $r = 3 > 1$

$\therefore$ প্রথম চারটি পদের সমষ্টি, $S_4 = a\frac{r^n-1}{r-1}$

$= \frac{2(3^4-1)}{3-1}$

$= \frac{2(81-1)}{2}$

$= 80$ **(Ans)**

**প্রশ্ন-১০:**

বাধন সাহেব উত্তরা ব্যাংকে চাকরি করে। 2008 সালের ১লা জানুয়ারী তিনি 25000 টাকা বেতনে চাকুরিতে যোগদান করেন। প্রতিমাসে তার বেতন বৃদ্ধি 250 টাকা।

**ক) তার মাসিক বেতনের ধারাটি কত?**

**খ) 1 বছর পর তার বেতন কত দাঁড়াবে?**

**গ) শুরু থেকে 2010 সাল পর্যন্ত তিনি কত টাকা আয় করেন?**

**সমাধান:**

**ক)** শুরুতে বাধন সাহেবের বেতন $= 25000$ টাকা

$\therefore$ ১ম পদ $a = 25000$

প্রতিমাসে বেতন বৃদ্ধি 250 টাকা

$\therefore$ ২য় মাসে বেতন হবে $25000 + 250 = 25250$ টাকা

$\therefore$ সাধারণ অন্তর $d = 250$

আমরা জানি,

১ম পদ $= 25000 + (1-1)250 = 25000$
২য় পদ $= 25000 + (2-1)250 = 25250$
৩য় পদ $= 25000 + (3-1)250 = 25500$
৪র্থ পদ $= 25000 + (4-1)250 = 25750$
… … … … … … … … … … … … …
… … … … … … … … … … … … …

$\therefore$ ধারাটি হলো $= 25000 + 25250 + 25500 + 25750 + \cdots$

খ) আমরা জানি, 1 বছর $= 12$ মাস

আবার, $n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ 12 মাস পরের বেতন হবে $= 25000 + (12-1)250$

$= 25000 + 11 \times 250$

$= 27750$ টাকা

**গ)** 2008 সাল হতে 2010 সাল পর্যন্ত 3 বছর

আমরা জানি, 1 বছর $= 12$ মাস

আমরা জানি, সমান্তর ধারার $n$ টি পদের সমষ্টি: $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$\therefore$ 36 মাসে মোট আয় করেন,

$$= \frac{36}{2}\{2 \times 25000 + (36-1) \times 250\} = 18\{50000 + 35 \times 250\}$$

$= 18 \times 58750 = 1057500$ টাকা **(Ans)**

## বহুনির্বাচনী (MCQ)

০১। $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ধারাটির সাধারণ পদ কোনটি?

(ক) $\frac{1}{n}$ (খ) $\frac{1}{2n}$ (গ) $\frac{1}{n+1}$ (ঘ) $\frac{n}{n+1}$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** ১ম পদ $= \frac{1}{2}$; এখানে, লব পদসংখ্যার সমান।

এবং হর $n+1$ এর সমান।

০২। $a, b, c, d$ সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $b = \frac{c+d}{2}$ (খ) $a = \frac{b+c}{2}$ (গ) $c = \frac{b+d}{2}$ (ঘ) হিন্দি শব্দ উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** ধরি, $a = x, b = x+1, c = x+2,, d = x+3$

$\therefore \frac{b+d}{2} = \frac{x+1+x+3}{2} = \frac{2x+4}{2} = x+2 = c$

০৩। প্রথম 30 টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি কত?

(ক) 405 (খ) 435 (গ) 445 (ঘ) 465 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** সমষ্টি $= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{30(30+1)}{2} = 465$

০৪। $3+6+9+\cdots$ ধারাটির কততম পদ 99?

(ক) 30 (খ) 33 (গ) 35 (ঘ) 45 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** মনে করি, $n$ তম পদ $= 99, a = 3, d = (6-3) = 3$

প্রশ্নমতে, $a + (n-1)d = 99$

বা, $3 + (n-1) \times 3 = 99$

বা, $3(n-1) = 96$

বা, $n - 1 = 32$

$\therefore n = 33$

০৫। 51 টি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নিচের কোনটি?

(ক) 1326 (খ) 1275 (গ) 2601 (ঘ) 1301 উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $a = 1, d = 2$

$\therefore S_{51} = \frac{51}{2}\{2 \times 1 + (51-1) \times 2\} = 2601$

০৬। $(2n)_{n=1}^{+\infty}$ এর অনুক্রম নিচের কোনটি?

(ক) 1,2,3 … …  (খ) 1,3,5,7 … …  (গ) 2,4,6,8 … …  (ঘ) 2,4,8,16 … …  উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $2n$ পদটিতে $n = 1,2,3,4 \ldots \ldots \ldots$ ইত্যাদি বসালে অনুক্রমটি হবে:
2.1,2.2,2.3,2,4 … … বা, 2,4,6,8 … …

০৭। $12 + 24 + 48 + \cdots + 768$ ধারাটিতে কতটি পদ আছে?

(ক) 5  (খ) 7  (গ) 13  (ঘ) 37  উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** ১ম পদ $a = 12$

$$r = \frac{24}{12} = 2$$

প্রশ্নমতে,

$$ar^{n-1} = 768$$

বা, $12 \times 2^{n-1} = 768$

বা, $2^{n-1} = \frac{768}{12}$

বা, $2^{n-1} = 64$

বা, $2^{n-1} = 2^6$

বা, $n - 1 = 6$

$$n = 7$$

০৮। একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ $-20$ হলে এর 31 টি পদের সমষ্টি কত?

(ক) 1771  (খ) 620  (গ) $-620$  (ঘ) $-1771$  উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $a + 15d = -20$

$$\therefore S = \frac{31}{2}\{2a + (31 - 1)d\}$$

$$= \frac{31}{2}\{2a + 30d\}$$

$$= \frac{31}{2}\{2(a + 15d)\}$$

$$= \frac{31}{2}\{2 \times (-20)\}$$

$$= \frac{31}{2} \times (-40) = -620$$

০৯। $a + 2a + 3a + 4a + \cdots$ সমান্তর ধারার $n$ তম পদ ও সাধারণ অন্তরের অনুপাত কত?

(ক) $n:1$ (খ) $n:2$ (গ) $1:n$ (ঘ) $2:n$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** সমান্তর ধারার ১ম পদ a $= a$

সাধারণ অন্তর $d = 2a - a = a$

∴ সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $a + (n-1)d$

$= a + (n-1)a$

$= a + an - a = an$

∴ $\frac{n \text{ তম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} = \frac{an}{a} = \frac{n}{1} = n:1$

১০। 25 টি বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি কত?

(ক) 620 (খ) 625 (গ) 675 (ঘ) 630 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $n$ সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S_n = n^2 \Rightarrow S_{25} = (25)^2 = 625$

১১। $\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \cdots$ ধারাটি একটি সমান্তর ধারা হলে, সাধারণ অন্তর $d = ?$

(ক) $-\frac{1}{n}$ (খ) 0 (গ) $\frac{1}{n}$ (ঘ) $n$ উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** সমান্তর ধারার সাধারণ অন্তর = যেকোনো পদ − পূর্ব পদ

$= \frac{n-2}{n} - \frac{n-1}{n}$

$= \frac{n-2-n+1}{n} = -\frac{1}{n}$

১২। 6,9,12 … … অনুক্রমটির ৪১ তম পদ কোনটি?

(ক) 115 (খ)120 (গ) 121 (ঘ) 126 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $a = 6, d = 9 - 6 = 3$

∴ ৪১ তম পদ $= a + (n-1)d$

$= 6 + (41-1) \times 3$

$= 6 + 40 \times 3 = 126$

১৩। $158 + 151 + 144 + \cdots + 116$ ধারাটির পদ সংখ্যা কত?

(ক) 7 (খ) 8 (গ) 9 (ঘ) 10 উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

বা, $116 = 158 + (n-1)(-7)$

বা, $158 - 7n + 7 = 116$

বা, $7n = 158 + 7 - 116 = 49$

বা, $n = 7$

১৪। $158 + 151 + 144 + \cdots + 116$ ধারারটির কোন পদ 130?

(ক) 7 (খ) 5 (গ) 4 (ঘ) 6 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** ধরি, ধারাটির $n$ তম পদ $= 130$

$\therefore n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

বা, $130 = 158 + (n-1)(-7)$

বা, $130 - 7n + 7 = 116$

বা, $7n = 158 + 7 - 130$

বা, $n = 5$

১৫। কোনো সমান্তর ধারার ১ম পদ 2 এবং সাধারণ অন্তর 3 হলে ধারাটির $n$ তম পদ কত?

(ক) $3n + 1$ (খ) $\frac{n(3n+1)}{2}$ (গ) $3n - 1$ (ঘ) i, ii, iii উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $a = 2, d = 3$

$\therefore a + (n-1)d = 2 + (n-1)3 = 2 + 3n - 3$

$= 3n - 1$

১৬। $log\,3 + log\,9 + log\,27 + \cdots$

i) ধারাটির সাধারণ অনুপাত $log\,2$

ii) ধারার প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $55\,log\,3$

iii) ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) I (খ) ii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $log\,3 + log\,9 + log\,27 + \cdots$

$= log\,3 + log\,3^2 + log\,3^3 + \cdots$

$= log\, 3 + 2\, log\, 3 + 3\, log\, 3 + \cdots$

১ম পদ $a = log\, 3$

$d = 2\, log\, 3 - log\, 3 = log\, 3$

ধারার প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $= \frac{10}{2}\{2a + (10-1)d\}$

$= 5\{2\, log\, 3 + 9\, log\, 3\}$

$= 5 \times 11\, log\, 3 = 55\, log\, 3$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৭ ও ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3 + x + y + \cdots + 15 + 17$ একটি সমান্তর ধারা।

১৭। $x$ এর মান কত?

(ক) 7 (খ) 13 (গ) 5 (ঘ) 9 উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $a = 3$

ধরি, $a + (n-1)d = x$

বা, $3 + 2 = x$

বা, $x = 5$

১৮। ১ম তিনটি পদের সমষ্টি কত?

(ক) 17 (খ) 20 (গ) 25 (ঘ) 15 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $a + (3-1)d = y$

বা, $3 + 4 = y$

বা, $y = 7$

$\therefore$ ১ম তিনটি পদের সমষ্টি $= 3 + 5 + 7 = 15$

১৯। $-10 - 7 - 4 - 1 + \cdots$ একটি ধারা হলে-

i) এটি একটি সমান্তর ধারা

ii) ধারার সপ্তম পদ 8

iii) ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** (i) সাধারণ অন্তর $d = -7 - (-10) = 3$

আবার, $-4-(-7)=3$। সুতরাং এটি একটি সমান্তর ধারা।

(ii) ৭ম পদ $= a+(7-1)d = -10+6.3 = 8$

(iii) ধারাটি গুণোত্তর ধারা নয়।

২০। $2+7+12+17+\cdots+47$

i) ধারাটির সাধারণ অন্তর $5$

ii) ধারার পদসংখ্যা $10$

iii) ধারাটির ৭ম পদ $= 37$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** (i) সাধারণ অন্তর $d = 7-2 = 5$

(ii) $2+(n-1)5 = 47$

বা, $(n-1)5 = 45$

বা, $n-1 = 9$

বা, $n = 10$

(iii) ৭ম পদ $a+(7-1)d = 2+6.5 = 32$

নিচের তথ্যের আলোকে ২১ ও ২২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$7+x+y+z+4375+\cdots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

২১। ধারাটিতে $r$ এর মান কত?

(ক) 7 (খ) 3 (গ) 8 (ঘ) 5 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** ১ম পদ $a = 7$

মনে করি, সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ ধারার ৫ম পদ $= ar^{5-1} = 7r^4$

প্রশ্নমতে, $7r^4 = 4375$

বা, $r^4 = 625$

বা, $r^4 = 5^4$

বা, $r = 5$

২২। ধারাটির ৭ম পদ কত?

(ক) 875 (খ) 109425 (গ) 109325 (ঘ) 108625 উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** ধারার ৭ম পদ $= ar^{7-1} = 7r^6 = 7 \times 5^6 = 7 \times 15625$
$= 109325$

২৩। $log\,2 + log\,16 + log\,512 + \cdots$ ধারাটির প্রথম 12 পদের সমষ্টি কত?

(ক) $650\,log\,2$ (খ) $55\,log\,2$ (গ) $1050\,log\,2$ (ঘ)$5050\,log\,2$ উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** $log\,2 + log\,16 + log\,512 + \cdots$

$= log\,2 + log\,2^4 + log\,2^9 + \cdots$

$= log\,2 + 4\,log\,2 + 9\,log\,2 + \cdots$

১ম দুটি সংখ্যার অন্তর $= 4\,log\,2 - log\,2 = 3\,log\,2$

২য় ও ৩য় সংখ্যার অন্তর $= 9\,log\,2 - 4\,log\,2 = 5\,log\,2$

বিজোড় সংখ্যার পার্থক্য দিয়ে ধারাটি গঠিত হয়েছে।

$= 1^2\,log\,2 + 2^2\,log\,2 + 3^2\,log\,2 + \cdots$

$= log\,2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots)$

$\therefore$ 12 টি পদের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} \times log\,2$

$= \frac{12(12+1)(12\times2+1)}{6} \times log\,2$

$= 650\,log\,2$

২৪। গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $-2$, সাধারণ অনুপাত 2 হলে, ১ম পাঁচটি পদের সমষ্টি কত?

(ক) 62 (খ) 30 (গ) $-30$ (ঘ) $-62$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $a = -2, r = 2, r > 1$

$\therefore$ ১ম পাঁচটি পদের সমষ্টি $= \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$= \frac{-2(2^5-1)}{2-1}$

$= \frac{-2(32-1)}{1}$

$= -2 \times 31 = -62$

২৫। $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{5}{64}$ ধারাটিতে পদসংখ্যা কত?

(ক) 6 (খ) 7 (গ) 8 (ঘ) 9 উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** $5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\cdots+\frac{5}{64}$

$=5\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{64}\right)$

ব্র্যাকেটের ভিতরে ১ম পদ $a=1$

সাধারণ অনুপাত $r=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$

মনে করি, ধারার $n$ তম পদ $ar^{n-1}$

এখন, $ar^{n-1}=\frac{1}{64}$

বা, $1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{64}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$

বা, $n-1=6$

$\therefore n=7$

২৬। 1,1,2,3,5,8 ... ... অনুক্রমের 11 তম পদ কোনটি?

(ক)34 (খ) 55 (গ) 89 (ঘ) 144 উত্তর: ক

২৭। $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার-

i) সমষ্টি $=\frac{n(n+1)}{2}$

ii) বর্গের সমষ্টি $=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

iii) ঘনের সমষ্টি $=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** সূত্র $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার-

i) সমষ্টি $=\frac{n(n+1)}{2}$

ii) বর্গের সমষ্টি $=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

২৮। $3 + 13 + 23 + 33 + \cdots$ একটি সমান্তর ধারা হলে-

i) সাধারণ পদ $= 10n - 7$

ii) সাধারণ অন্তর $= 10$

iii) $(p+1)$ তম পদ $10p + 3$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** দেওয়া আছে, $a = 3$

$d = 13 - 3 = 10$

$\therefore$ সাধারণ পদ $= a + (n-1)d$

$= 3 + (10n - 10) = 10n - 7$

$(p+1)$ তম পদ $= 10n - 7$

$= 10(p+1) - 7$

$= 10p + 10 - 7 = 10p + 3$

২৯। $2 - 5 - 12 - 19 - \cdots$ ধারাটির 8 টি পদের সমষ্টি কত?

(ক) 180 (খ) $-188$ (গ) $-180$ (ঘ) 188 উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $2 - 5 - 12 - 19 - \cdots$

$a = 2, d = -5 - 2 = -7$

$\therefore$ ধারাটির 8 টি পদের সমষ্টি $= S_8 = \frac{8}{2}\{2 \times 2 + (8-1)(-7)\} = -180$

৩০। $\frac{1}{3} + \frac{-2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{-4}{9} + \cdots$ অনুক্রমের সাধারণ পদ কোনটি?

(ক) $(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ (খ) $(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$ (গ) $\frac{1}{2^{n-1}}$ (ঘ) $\frac{n-1}{n+1}$ উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $n = 1$ হলে, $(-1)^{1+1}\frac{1}{2.1+1} = (-1)^2\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$n = 2$ হলে, $(-1)^{2+1}\frac{2}{2.2+1} = (-1)^3\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$

৩১। একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\sqrt{\frac{2}{5}}$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদের মান কত?

(ক) $\sqrt{5}$ (খ) $\sqrt{2}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ঘ) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $a = \frac{\sqrt{5}}{2}, r = \sqrt{\frac{2}{5}}$

$\therefore$ ৩য় পদ $= ar^{3-1} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

নিচের তথ্যের আলোকে ৩২ ও ৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$6 + m + n + 162$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত।

৩২। ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

(ক) 3 (খ) 6 (গ) 12 (ঘ) 27 উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** $a = 6$

সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ ৪র্থ পদ $= ar^{4-1} = 6r^3$

প্রশ্নমতে,

$6r^3 = 162$

বা, $r^3 = 27$

$\therefore r = 3$

৩৩। $(n - m)$ এর মান কোনটি?

(ক) 18 (খ) 36 (গ) 54 (ঘ) 1 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** ২য় পদ $m = ar^{2-1} = 6r = 6 \times 3 = 18$

৩য় পদ $n = ar^{3-1} = 6r^2 = 6 \times 3^2 = 54$

$\therefore n - m = 54 - 18 = 36$

৩৪। $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$ ধারাটির ১ম 8 টি পদের সমষ্টি কত?

(ক) $\frac{364}{243}$ (খ) $\frac{1093}{729}$ (গ) $\frac{3280}{2187}$ (ঘ) $\frac{6560}{6561}$ উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** $r = \frac{1}{3} \div 1 = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 8 টি পদের সমষ্টি $S_8 = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{6561}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{6561-1}{6561}}{\frac{2}{3}} = \frac{6560}{6561} \times \frac{3}{2} = \frac{3280}{2187}$$

নিচের তথ্যের আলোকে ৩৫ ও ৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$3 + 6 + x + ax + \cdots$

৩৫। $x$ এর মান কত?

(ক) 8 (খ) 12 (গ) 16 (ঘ) 20 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $r = \frac{\text{যেকোনো পদ}}{\text{পূর্বপদ}}$

অর্থাৎ $\frac{6}{3} = \frac{x}{6}$

বা, $3x = 36$

বা, $x = 12$

৩৬। $a$ এর মান কোনটি?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 8 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $r = \frac{\text{যেকোনো পদ}}{\text{পূর্বপদ}}$

অর্থাৎ $\frac{ax}{x} = \frac{6}{3} = 2$

বা, $ax = 2x$

বা, $a = 2$

৩৭। একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ হলে, ধারাটির ৬ষ্ঠ পদের মান কত?

(ক) $\frac{4}{18\sqrt{3}}$ (খ) $\frac{16}{18\sqrt{3}}$ (গ) $\frac{4}{27}$ (ঘ) $\frac{4}{9\sqrt{3}}$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ৬ষ্ঠ পদ $= ar^{6-1} = ar^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{4}{9\sqrt{3}}$$

৩৮। প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি-

(ক) 15 (খ) 15 (গ) 21 (ঘ) 25 উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** আমরা জানি, প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

প্রথম $n$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $S_2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

অর্থাৎ $S_2 = {S_1}^2$

বা, $S_1 = \sqrt{S_2} = \sqrt{441} = 21$

৩৯। $5 - 5 + 5 - 5 + \cdots$ ধারাটির $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

(ক) 5 (খ) −5 (গ) 0 (ঘ) 1 উত্তর: ক

**ব্যাখ্যা:** ধারাটির প্রথম দুটি পদের সমষ্টি $= 5 - 5 = 0$

প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি $= 5 - 5 + 5 = 5$

জোড় সংখ্যক হলে সমষ্টি 0 এবং বিজোড় সংখ্যক হলে সমষ্টি 5

যেহেতু $(2n+1)$ বিজোড় তাই $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 5

৪০। $x + y + z + w + \cdots$ ধারাটি গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{y}{x} = \frac{w}{z}$ (খ) $y - x = w - z$ (গ) $\frac{x}{y} = \frac{w}{z}$ (ঘ) $x - y = z - w$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** সাধারণ অনুপাত $= \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{w}{z}$

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{w}{z}$

৪১। $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 3025$ হলে, $n = ?$

(ক) 25 (খ) 15 (গ) 10 (ঘ) 55 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 3025 = (55)^2$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 55$

$\Rightarrow n^2 + n = 110$

$\Rightarrow n^2 + n - 110 = 0$

$\Rightarrow n^2 + 11n - 10n - 110 = 0$

$\Rightarrow n(n+11) - 10(n+11) = 0$

$\Rightarrow (n-10)(n+11)=0$

$\Rightarrow n=10$

৪২। $1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=?$

(ক) 300 (খ) 45 (গ) 2025 (ঘ) 285 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{9(9+1)(9\times2+1)}{6}=\frac{9\times10\times19}{6}=285$

৪৩। $8+4\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}+\cdots$ ধারাটির কোন পদ $\sqrt{2}$?

(ক)5 (খ)6 (গ)4 (ঘ)7 উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $ar^{n-1}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 8\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^6}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5$

$\Rightarrow n-1=5$

$\Rightarrow n=6$

৪৪। $1-1+1-1+\cdots$ ধারাটির-

i) $2n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 1

ii) $2n+1$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 1

iii) পদসংখ্যা অসীম

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii, iii উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** ধারাটির প্রথম দুটি পদের সমষ্টি $=1-1=0$

প্রথম তিনটি পদের সমষ্টি $=1-1+1=1$

পদ জোড় সংখ্যক হলে সমষ্টি 0 এবং বিজোড় সংখ্যক হলে সমষ্টি 1

যেহেতু $(2n+1)$ বিজোড় তাই $(2n+1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি 1

ধারাটি অসীম।

৪৫। $p, q, r, s$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে-

(ক)$pq = rs$ (খ)$qs = r^2$ (গ) $pq = r^2$ (ঘ)$pq = qr$ উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** $p, q, r, s$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে: $\frac{q}{p} = \frac{r}{q} = \frac{s}{r}$

$$\therefore \frac{r}{q} = \frac{s}{r} \Rightarrow qs = r^2$$

৪৬। $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{4}{3^4} \dots \dots$ এর সাধারণ রূপ কোনটি?

(ক) $\frac{1}{3^n}$ (খ) $\frac{3}{3^{n+1}}$ (গ) $\frac{n}{3^{n-1}}$ (ঘ) $\frac{n}{3^n}$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{4}{3^4} \dots \dots$

বা, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}, \frac{4}{3^4} \dots \dots$

এখানে, লব $\in N$ এবং হর $\in 3^n$

৪৭। 2,4,6,8 … … অনুক্রমটির 51 তম পদ কোনটি?

(ক) 50 (খ) 51 (গ) 101 (ঘ) 102 উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** অনুক্রমটি 2,4,6,8 … …

$= 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 \dots \dots$

$\therefore$ 51 তম পদ $= 2 \times 51 = 102$

৪৮। একটি সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $5n + 3$ হলে সাধারণ অন্তর কত?

(ক) $-2$ (খ) 13 (গ) 5 (ঘ) 8 উত্তর: গ

**ব্যাখ্যা:** সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $5n + 3$

ধারাটির ১ম পদ $= 5 \times 1 + 3 = 8$

২য় পদ $= 5 \times 2 + 3 = 13$

$\therefore$ সাধারণ অন্তর $= (13 - 8) = 5$

৪৯। একটি সমান্তর ধারার ১ম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $d$, 11 তম পদ 62 হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক)$a + 11s = 62$ (খ)$a + 10d = 62$

(গ)$d + 10a = 62$ (ঘ) $d + 11a = 62$ উত্তর: খ

**ব্যাখ্যা:** সমান্তর ধারার $n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ $11$ তম পদ $= a + (11-1)d$

$= a + 10d$

৫০। একটি সমান্তর ধারার ১ম পদ $1$, সাধারণ অন্তর $3$ হলে উক্ত ধারার $n$ তম পদ কত?

(ক) $3n-2$ (খ) $3n-3$ (গ) $3n+1$ (ঘ) $3n+2$ উত্তর: ঘ

**ব্যাখ্যা:** $a = 1$ ও $d = 3$

$\therefore$ $n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

$= 1 + (n-1)3$

$= 1 + 3n - 3$

$= 3n - 2$

## প্র্যাকটিস

**প্রশ্ন- ১:** কোনো গুণোত্তর ধারার ৪র্থ পদ $9\sqrt{3}$ এবং ৭ম পদ $\frac{4}{9\sqrt{3}}$. [কু. মি. ১৯]

**(ক) $125 + 25 + 5 + \ldots\ldots\ldots$ ধারার কোন পদ 125 তা নির্ণয় কর।**

**(খ) ধারাটি নির্ণয় কর।**

**(গ) দেখাও যে, ধারাটির প্রথম 6 টি পদের সমষ্টি $\frac{19}{18}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$**

**সমাধান:**

**(ক)** প্রদত্ত ধারা $125 + 25 + 5 + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির (যেকোনো পদ + এর পূর্ববর্তী পদ) $= 25 + 125 + 125 = \frac{1}{5}$

অথবা $5 + 125 = \frac{1}{5}$

$\therefore$ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = 125$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{5}$

মনে করি, ধারাটির $n$ তম পদ$= \frac{1}{25}$

$\therefore a^{n-1} = \frac{1}{125}$

বা, $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{125}$

বা, $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{125 \times 125}$

বা, $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6}$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{6}$$

বা,$n - 1 = 6$

বা, $n = 6 \pm 1$

$\therefore$ধারাটি 7 তম পদ $\frac{1}{125}$.

**(খ)** মনে করি, গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $a$ এবং সাধারণ অনুপাত $r$

$\therefore$ধারাটির $n$ তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 8 র্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^{3}$

এবং ধারাটির ৭ম পদ $= ar^{7-1} = ar^{6}$

শর্তমতে, $ar^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \ldots\ldots\ldots (i)$

এবং $ar^6 = \frac{4}{9\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots (ii)$

(ii) কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে

$$\frac{a^6}{ar^3} = \frac{4}{9\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

বা, $r^3 = \frac{4}{9\sqrt{3}} \times \frac{3}{\sqrt{2}}$

বা, $r^3 = \frac{2\times2\times3}{3\times3\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}$

বা, $r^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$$r^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3$$

$$\therefore \mathrm{r} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$r$ এর মান $(i)$ নং এ বসিয়ে পাই,

$$\mathrm{a}.\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

বা, $\mathrm{a} \times \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

, $\mathrm{a} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\therefore \mathrm{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা $= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \ldots\ldots.$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

**(গ)** 'খ' থেকে প্রাপ্ত,

ধারাটি : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এখানে, $r < 1$

$\therefore$ ধারাটির ১ম $n$ পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম 6 পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^6)}{1-r}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^6\right\}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{8}{27}\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{27-8}{27}\right)}{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times 19}{2\times 27} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{19}{18(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{19(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{18(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{19(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{18\{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\}}$$

$$= \frac{19(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{18(3-2)}$$

$$= \frac{19}{18}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

**প্রশ্ন- ২:** $-1 + \sqrt{2} -$ একটি গুণোত্তর ধারা। [চ. বো. ১৬]

**(ক) ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং ৪র্থ পদ কত?**

**(খ) ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?**

**(গ) ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**(ক)**

প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{\frac{1}{1\sqrt{2}}} = -1 \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$

আমরা, গুণোত্তর ধারার তম $n$ পদ= $ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির ৪র্থ পদ $ar^{4-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{4-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2}$$

$$= -2$$

**(খ)** ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

'ক' থেকে পাই, সাধারণ অনুপাত,$r = -\sqrt{2}$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $= ar^{10-1}$

$$= ar^{9}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2})^{9}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}(\sqrt{2})^{8}$$

$$= -16$$

আমরা জানি,

ধারাটির প্রথম $n$ পদের সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $[\because r < 1]$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(-\sqrt{2})^{10}\}}{1-(-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-32)}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-31}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{-31\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{-31.\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2\{(\sqrt{2})^2-1^2\}}$$

$$= \frac{-31\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2(2-1)}$$

$$= \frac{-31\cdot\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$$

**প্রশ্ন-3:** একটি গুণোত্তর ধারার অষ্টম পদ – 27 এবং একাদশ তম $81\sqrt{3}$. [রা. বো. ১৫]

**(ক) প্রদত্ত তথ্যগুলো সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর।**

**(খ) ধারাটির 14 তম পদ নির্ণয় কর।**

**(গ) ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।**

**সমাধান:**

**(ক)** মনে করি,

গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r

$\therefore$ধারাটির অষ্টম পদ $= ar^{8-1} = ar^7$

এবং ধারাটির একাদশ পদ $= ar^{11-1} = ar^{10}$

প্রশ্নমতে, $ar^7 = -27$

এবং $ar^{10} = 81\sqrt{3}$

**(খ)** ক হতে পাই,

$$ar^7 = -27 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

এবং $ar^{10} = 81\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (ii)$

$(ii)$ নং কে $(i)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{a^{10}}{ar^1} = \frac{81\sqrt{3}}{-27}$$

বা, $r^3 = -3\sqrt{3}$

বা, $r^3 = -3\sqrt{3}$

বা,$r^3 = (-\sqrt{3})^3$

$\therefore r = -\sqrt{3}$

$(i)$ নং এ $r$ মান বসিয়ে পাই,

$a.(-\sqrt{3})^7 = -27$

বা,$-(\sqrt{3})^7.a = -27$

বা, $27\sqrt{3}a = 27$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ ধারাটির 14 তম পদ $= ar^{14-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3})^{13}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \times 729\sqrt{3}$$

$$= -729$$

**(গ)** 'খ' থেকে পাই,গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

সাধারণ অনুপাত, $r = -\sqrt{3}$ এখানে, $r < 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম $n$ পদের সমষ্টি= $a.\frac{1-r^n}{1-r}$

$\therefore$ ধারাটির 10 টি পদের সমষ্টি $= a.\frac{1-r^n}{1-r}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1-(-\sqrt{3})^{10}}{1-(-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(1-243)}{(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-242}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-242(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-242(3-\sqrt{3})}{3^2-(\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-242(3-\sqrt{3})}{9-3}$$

$$= \frac{-242(3-\sqrt{3})}{6}$$

$$= \frac{121(3-\sqrt{3})}{3}$$

**প্র্যাকটিস**

১। $\frac{1}{\sqrt{7}}, -1, \sqrt{7}$ ... ... ... অনুক্রমটির সাধারণ অনুপাত কত? [চ. বো ২২]

(ক) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (খ) $-\frac{1}{\sqrt{7}}$ (গ) $\sqrt{7}$ (ঘ) $-\sqrt{7}$ উত্তর: ঘ

২। $ar + ar^3 + ar^5 +$ ... ... .... ধারাটির $n$ তম পদ কত? [সি. বো. ২২]

(ক) $ar^n$ (খ)$ar^{n-1}$ (গ) $ar^{2n-1}$ (ঘ)$ar^{2n-1}$ উত্তর: গ

৩। $3 + 9 + 27 + 81 +$ ...ধারাটির সাধারণ পদ কত?

(ক) $3^{n-1}$ (খ) $3^{n+1}$ (গ) $3^n + 2$ (ঘ) $3^n$ উত্তর: ঘ

৪। $2 + p + q + r + 162$ গুণোত্তর ধারাটির চতুর্থ পদ কোনটি? [চ. বো ২২]

(ক)18 (খ)27 (গ)54 (ঘ)81 উত্তর: গ

৫। $7 + x + y + 56 +$ গুণোত্তর ধারা হলে y এর মান কত? [দি.বো.২২]

(ক) 2 (খ) 14 (গ) 28 (ঘ) 56 উত্তর:গ

৬। $32 + 16 + 8 + \ldots$ ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{4}$? [য.বো: ২২]

(ক) 6 (খ) 7 (গ) 8 (ঘ) 9 উত্তর:গ

৭। কোন গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$। ৭ম পদ $9\sqrt{3}$ হলে সাধারণ অনুপাত কত? [দি.বো: ২২]

(ক)$\sqrt{3}$ (খ) 3 (গ) $3\sqrt{3}$ (ঘ) 27 উত্তর: ক

৮। $4 - 4 + 4 - 4 + \ldots\ldots\ldots.$ ধারাটি প্রথম $2(n-1)$ সংখ্যক কত? [ঢা.বো: ২২]

(ক) 8 (খ) 4 (গ) 2 (ঘ) 0 উত্তর: ঘ

৯। $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম $2n$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত? [সি.বো: ২২]

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) $2n$ উত্তর: ক

১০। $4 + p + q + 32$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে $(p^2 + q^2)$ এর মান নিচের কোনটি? [ব.বো.'২০]

(ক) 80 (খ) 264 (গ) 320 (ঘ) 576 উত্তর: গ

১১। একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ $\frac{1}{3^{n}}$ হলে, দ্বিতীয় পদ কত? [ঢা.বো.'২০]

(ক) $\frac{1}{6}$ (খ)$\frac{1}{3}$ (গ)$\frac{4}{9}$ (ঘ) $\frac{1}{9}$ উত্তর: ঘ